



TITLE:

# Nonlinear Ergodic Theorems and their Applications(Nonlinear Evolution Equation : Theory and Applications)

AUTHOR(S):

高橋, 渉

---

CITATION:

高橋, 渉. Nonlinear Ergodic Theorems and their Applications(Nonlinear Evolution Equation : Theory and Applications). 数理解析研究所講究録 1985, 559: 78-101

ISSUE DATE:

1985-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/99014>

RIGHT:

## Nonlinear Ergodic Theorems and their Applications

東工大 理 高橋 渉

(WATARU TAKAHASHI)

$E$  を Banach 空間とし,  $C \subset E$  の空でない閉凸集合とする.  
このとき,  $C$  上の写像  $T$  が nonexpansive であるとは

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| \quad (x, y \in C)$$

を満たすときである.  $T$  の不動点からなる集合を  $F(T)$  で表わす.  $C$  上の nonexpansive 写像  $S(t)$  からなる族  $S = \{S(t) : t \geq 0\}$  が, つぎの条件 (a), (b) を満たすとき,  $C$  上の nonexpansive semigroup であるといわれる.

$$(a) \quad S(0) = I, \quad S(t+s) = S(t)S(s) \quad (t, s \geq 0).$$

$$(b) \quad \text{任意の } x \in C \text{ に対し, } t \mapsto S(t)x \text{ は連続である.}$$

最初の非線形エルゴード定理は 1975 年に Baillon [1] に  
よって証明された:  $H$  を Hilbert 空間,  $C$  を閉凸な部分集  
合,  $T$  を  $C$  から  $C$  への nonexpansive 写像とする.  $F(T) \neq \emptyset$   
とき,  $C$  の任意の元  $x$  に対し

$$S_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k x$$

は  $F(T)$  の点に弱収束する。

この定理は後に Bruck [6], Hirano [11], Reich [20] 等によって一様凸な Banach 空間の場合まで拡張されている。この nonexpansive semigroups に対応する結果は Baillon [2], Baillon-Brezis [3] 等によって証明されている。また可換な semigroups に対する非線形エルゴード定理は Brezis-Browder [5], Hirano-Takahashi [15] によって与えられている。最近 Takahashi [31] は非可換な semigroups に対してつぎのような非線形エルゴード定理を証明した:  $H$  を Hilbert 空間とし,  $C$  を  $H$  の閉凸集合とする。  $\mathcal{S}$  を  $C$  上の nonexpansive 写像の作る amenable semigroup とし,

$$F(\mathcal{S}) = \bigcap \{ F(t) : t \in \mathcal{S} \} \neq \emptyset$$

とする。このとき,  $C$  から  $F(\mathcal{S})$  への nonexpansive retraction  $P$  で, 任意の  $t \in \mathcal{S}$  に対して  $Pt = tP = P$  であり, しかも

$$Px \in \overline{\text{co}} \{ tx : t \in \mathcal{S} \}, \quad \forall x \in C$$

を満たすものが存在する。ただし  $\overline{\text{co}} A$  は  $A$  の convex hull の closure を表わす。

このような retraction を "Ergodic retraction" と呼ぶことにすると, エルゴード理論では "Ergodic retraction" の存在と一意性を研究することが最も本質的な部分となってくる。

ここでは, まず Hilbert 空間において, より一般的な semigroups

に対して, このような "Ergodic retraction" の存在と一意性を証明する. そのあと, 線形の場合でいうところの mixing に対応する結果を研究し, さらに mean ergodic 定理を証明する. この結果を用いてこれまでのエルゴード定理のいくつかを証明し, 最後にエルゴード定理と発展方程式の関係について述べる.

### §1. 準備

$S$  を abstract semigroup とし,  $m(S)$  を  $S$  上の有界実数値関数の作る Banach 空間とする. そのノルムは supremum norm とする. 任意の  $s \in S$  と  $f \in m(S)$  に対して,  $f_s, f^s$  を

$$f_s(t) = f(st), \quad f^s(t) = f(ts) \quad (t \in S)$$

で定義する.  $\mu \in m(S)^*$  ( $m(S)^*$  は  $m(S)$  の dual space) は  $\|\mu\| = \mu(1) = 1$  であるならば mean とわれる. Mean  $\mu$  が left (right) invariant であるとは,

$$\mu(f_s) = \mu(f) \quad (\mu(f^s) = \mu(f))$$

を満たすときである. Invariant mean とは left と right な invariant mean のことである. left (right) invariant mean をもつ semigroup を left (right) amenable, invariant mean をもつ semigroup を amenable とする.

Day [8] は commutative semigroup は amenable であることを証明している. また  $\mu \in m(S)^*$  が  $S$  上の mean である必要

十分条件は  $f \in m(S)$  に対し

$$\inf \{f(s) : s \in S\} \leq \mu(f) \leq \sup \{f(s) : s \in S\}$$

であるから, semigroup  $S$  が right amenable とき,  $\mu \in$  right invariant mean となること,  $f \in m(S)$  に対し

$$\sup_s \inf_t f(ts) \leq \mu(f) \leq \inf_s \sup_t f(ts)$$

が成立することもある。Semigroup  $S$  は  $a, b \in S$  に対し,  $ac = bd$  ( $ca = db$ ) となるような  $c, d \in S$  が存在するとき, left (right) reversible であるといわれる。Granirer [10, 11] は left (right) amenable semigroup は left (right) reversible であることを証明している。  $S$  が right reversible semigroup であるとし,  $t, s \in S$  に対し  $t = s$  or  $t \in Ss$  のとき  $t \geq s$  とすると,  $S$  は有向集合になる。

$E^*$  を Banach 空間  $E$  の dual 空間とし,  $x^* \in E^*$  の  $x \in E$  における値を  $\langle x, x^* \rangle$  で表わす。このとき  $E$  から  $E^*$  への duality 写像  $J$  は

$$J(x) = \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

によって定義される。Hahn-Banach の定理を用いると,  $J(x)$  が空でないことが示され, さらに weak\* compact で凸であることもわかる。  $B = \{x \in E : \|x\| = 1\}$  を  $E$  の unit sphere とする。  $E$  のノルムが Gâteaux differentiable であるとは,  $x, y \in B$  に対し

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \dots (*)$$

がつねに存在するときをいう。このとき  $E$  は smooth であるともいわれる。また  $x$  に対して  $(*)$  の極限が  $y \in B$  に関して一様であるとき、 $E$  のノルムは Fréchet differentiable であるといわれる。Fréchet differentiable ノルムをもつ Banach 空間としては Hilbert 空間や  $L^p$  空間 ( $1 < p < \infty$ ) がその代表的例として挙げられよう。

## §2. Hilbert 空間におけるエルゴード定理

この節では、Hilbert 空間において nonexpansive 写像の作る right reversible semigroup の非線形エルゴード定理を証明する。  $C$  を Hilbert 空間  $H$  の閉な凸集合とし、  $S$  を right reversible semigroup とする。  $\mathcal{S} = \{T_s : s \in S\}$  を  $C$  から  $C$  への nonexpansive 写像  $T_s, s \in S$  の作る族で、つぎの条件：

$$T_{st}(x) = T_s T_t(x), \quad \forall a, b \in S, \quad \forall x \in C$$

を満たすものとする。このとき  $\mathcal{S} = \{T_s : s \in S\}$  を  $C$  から  $C$  への nonexpansive 写像としての  $S$  の表現という。この  $\mathcal{S}$  に対して  $F(\mathcal{S})$  は  $T_s, s \in S$  の共通な不動点全体の集合として定義される。すると  $F(\mathcal{S})$  は閉で凸集合となる。

定理 1.  $C$  を Hilbert 空間の空でない閉凸集合とし、  $S$  を right reversible semigroup とする。  $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$  を  $C$  から

$C$  への nonexpansive 写像としての  $S$  の表現とし,  $F(S) \neq \emptyset$  とする. このとき, 次の条件は同値である.

(a) 任意の  $x \in C$  に対して  $\bigcap_{s \in S} \overline{\text{co}}\{T_t x : t \in S\} \cap F(S) \neq \emptyset$ .

(b)  $C$  から  $F(S)$  上への nonexpansive retraction  $P$  で, 任意の  $t \in S$  に対して  $PT_t = T_t P = P$  であり, かつ

$$Px \in \overline{\text{co}}\{T_t x : t \in S\}, \forall x \in C$$

を満たすものが存在する.

証明. (b)  $\Rightarrow$  (a).  $x \in C$  とする. すると任意の  $t \in S$  に対して  $T_t P = P$  なので  $Px \in F(S)$  となる. また任意の  $s \in S$  に対して

$$Px = PT_s x \in \overline{\text{co}}\{T_t T_s x : t \in S\} \subset \overline{\text{co}}\{T_t x : t \in S\}$$

であるから  $Px \in \bigcap_{s \in S} \overline{\text{co}}\{T_t x : t \in S\}$  となる. よって

$$\bigcap_{s \in S} \overline{\text{co}}\{T_t x : t \in S\} \cap F(S) \neq \emptyset.$$

(a)  $\Rightarrow$  (b).  $x \in C$  とし,  $f \in F(S)$  とする. このとき  $b \geq a$  ならば  $b = sa$  となる  $s \in S$  が存在するので

$$\begin{aligned} \|T_b x - f\|^2 &= \|T_{sa} x - f\|^2 = \|T_s T_a x - T_s f\|^2 \\ &\leq \|T_a x - f\|^2. \end{aligned}$$

そこで,  $\lim_s \|T_s x - f\|^2$  が存在する.

$$g(f) = \lim_s \|T_s x - f\|^2, \forall f \in F(S)$$

とし,  $r = \inf\{g(f) : f \in F(S)\}$  とする. このとき,  $g$  は連続で凸関数となり,  $\|f\| \rightarrow \infty$  のとき  $g(f) \rightarrow \infty$  である. よって

$$M(x) = \{f \in F(\mathcal{S}) : g(f) = r\}$$

は空でない。つぎにこの  $M(x)$  が一点であることを示す。  $f_0, f_1$  を  $M(x)$  の元とする。このとき、任意の  $s \in S$  に対して

$$\left\| \frac{f_0 - f_1}{2} \right\|^2 = \frac{\|T_s x - f_0\|^2}{2} + \frac{\|T_s x - f_1\|^2}{2} - \left\| T_s x - \frac{f_0 + f_1}{2} \right\|^2$$

であるから、

$$\left\| \frac{f_0 - f_1}{2} \right\|^2 = r - \lim_s \left\| T_s x - \frac{f_0 + f_1}{2} \right\|^2 \leq 0$$

となる。よって  $f_1 = f_0$  である。  $M(x) = \{f_0\}$  とし、  $Q$  を  $H$  から  $F(\mathcal{S})$  への metric projection とする。このとき [21] から  $QT_s x$  は  $F(\mathcal{S})$  の点  $z$  に強収束する。つぎにこの  $z$  は実は  $f_0$  であることを示す。  $b \geq a$  とする。このとき  $b = sa$  となる  $s \in S$  が存在するので

$$\|QT_a x - T_b x\|^2 = \|T_s QT_a x - T_s a x\|^2 \leq \|QT_a x - T_a x\|^2$$

となる。だから任意の  $a \in S$  に対して

$$\begin{aligned} g(QT_a x) &= \lim_b \|T_b x - QT_a x\|^2 \\ &= \lim_{b, a \leq b} \|T_b x - QT_a x\|^2 \leq \|T_a x - f\|^2. \end{aligned}$$

$g$  は連続であり、  $QT_a x$  は  $z \in F(\mathcal{S})$  に収束するので

$$g(z) \leq \lim_a \|T_a x - f\|^2 = g(f).$$

よって  $f_0 = z = \lim_t QT_t x$  である。



$v \in \bigcap_{s \in S} \overline{\text{co}}\{T_t x : t \geq s\} \cap F(S)$  としよう. すると

$$\|f_0 - v\|^2 = \|T_s x - v\|^2 - \|T_s x - f_0\|^2 - 2\langle f_0 - v, T_s x - f_0 \rangle$$

であるから

$$\begin{aligned} \|f_0 - v\|^2 + 2 \lim_s \langle f_0 - v, T_s x - f_0 \rangle \\ = \lim_s \|T_s x - v\|^2 - \lim_s \|T_s x - f_0\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

だから, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対し

$$2 \lim_s \langle f_0 - v, T_s x - f_0 \rangle > -\|f_0 - v\|^2 - \varepsilon$$

である. よって  $s_0 \in S$  が存在して,  $s \geq s_0$  となる  $s \in S$  に対して

$$2\langle f_0 - v, T_s x - v \rangle > -\|f_0 - v\|^2 - \varepsilon$$

である.  $v \in \overline{\text{co}}\{T_t x : t \geq s_0\}$  であるので

$$2\langle f_0 - v, v - f_0 \rangle \geq -\|f_0 - v\|^2 - \varepsilon.$$

よって  $\|f_0 - v\|^2 \leq \varepsilon$ .  $\varepsilon$  は任意であるので  $f_0 = v$  となる.

今や  $x \in C$  に対し,  $Px = \lim_{\pm} Q T_{\pm} x$  を定義する. すると  $T_s P = P$  は明らかであり,

$$P T_s x = \lim_{\pm} Q T_{\pm} T_s x = \lim_{\pm} Q T_{\pm s} x = P x$$

であるから,  $P T_s = P$  である.  $Q$  は nonexpansive [25] であるので,  $P$  もまた nonexpansive となり,  $Px \in \overline{\text{co}}\{T_t x : t \in S\}$  は上の証明から明らかである.

$S$  が amenable semigroup であるときは, つぎの定理を得る.

定理 2.  $C$  を Hilbert 空間の空でない閉凸集合とし,  $S$  を amenable semigroup とする.  $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$  を  $C$  から  $C$  へ

の nonexpansive 写像としての  $S$  の表現とし,  $F(S) \neq \emptyset$  とする.  
 このとき,  $C$  から  $F(S)$  上への nonexpansive retraction  $P$  で,  
 任意の  $t \in S$  に対し  $PT_t = T_t P = P$  であり, かつ

$$Px \in \overline{\text{co}}\{T_t x : t \in S\}, \quad \forall x \in C$$

を満たすものが存在する.

証明.  $\mu$  を  $S$  上の invariant mean とし,  $x \in C$  とする.  
 このとき  $F(S) \neq \emptyset$  なので  $\{T_t x : t \in S\}$  は有界である. 任意  
 の  $y \in H$  に対して, 実数値関数  $g(t) = \langle T_t x, y \rangle, t \in S$  を考え  
 ると  $g$  は有界となる.  $\mu_t \langle T_t x, y \rangle = \mu(g)$  とすると  $\mu_t \langle T_t x, y \rangle$   
 は  $y$  に関して linear で continuous である. よって Riesz の  
 定理より

$$\mu_t \langle T_t x, y \rangle = \langle x_0, y \rangle, \quad \forall y \in H$$

となる  $x_0 \in H$  が存在する. [31] の方法を使えば

$$x_0 \in \bigcap_{s \in S} \overline{\text{co}}\{T_t x : t \geq s\} \cap F(S)$$

であることがわかる. 定理 1 より 定理 2 がわかる.

### §3. 非線形作用素に対する mixing

この節では  $\{T_t x\}$  の収束性を問題にする.  $T_t$  が線形の時  
 $T_t x$  が弱収束することは mixing の性質として知られている.

補助定理.  $E$  を Fréchet differentiable norm をもつ 一樣凸な  
 Banach 空間,  $C$  をその閉凸集合,  $S$  を right reversible  
 semigroup とする.  $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$  を  $C$  から  $C$  へ a nonexpansive

写像としての  $S$  の表現とし,  $F(S) \neq \emptyset$  とする.  $x \in C$  とする.

このとき,  $z \in \bigcap_{s \in S} \overline{\text{co}}\{T_t x : t \geq s\} \cap F(S)$  と  $y \in F(S)$  に対して

$$\langle T_t x - y, J(y - z) \rangle \leq 0, \quad \forall t \geq t_0.$$

となるような  $t_0 \in S$  が存在する.

この補助定理を用いて, つぎの定理を得る.

定理3.  $E$  を Fréchet differentiable norm をもつ一様凸な Banach 空間,  $C$  をその閉凸集合,  $S$  を right reversible semigroup とする.  $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$  を  $C$  から  $C$  への nonexpansive 写像としての  $S$  の表現とし,  $F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$  とする. このとき, 任意の  $x \in C$  に対して, 集合  $\bigcap_{s \in S} \overline{\text{co}}\{T_t x : t \geq s\} \cap F(\mathcal{S})$  は高々一点からなる.

証明.  $y, z \in \bigcap_{s \in S} \overline{\text{co}}\{T_t x : t \geq s\} \cap F(\mathcal{S})$  とする.

$\frac{y+z}{2} \in F(\mathcal{S})$  なので, 補助定理より

$$\langle T_t x - \frac{y+z}{2}, J(\frac{y+z}{2} - z) \rangle \leq 0, \quad \forall t \geq t_0.$$

となる  $t_0 \in S$  が存在する.  $y \in \overline{\text{co}}\{T_t x : t \geq t_0\}$  なので

$$\langle y - \frac{y+z}{2}, J(\frac{y+z}{2} - z) \rangle \leq 0.$$

よって,  $\langle y - z, J(y - z) \rangle \leq 0$  となり  $y = z$  を得る.

この定理から,  $\{T_t x : t \in S\}$  の弱収束に関するいくつかの結果を得ることが出来る.  $x \in C$  に対して,  $w(x)$  は

$\{T_t x : t \in S\}$  の weak limit points の全体を表わすとする.

定理4.  $E$  を Fréchet differentiable norm をもつ 一様凸な Banach 空間,  $C$  をその閉凸集合,  $S$  を right reversible semigroup とする.  $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$  を  $C$  から  $C$  への nonexpansive 写像として  $S$  の表現とし,  $F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$  とする. このとき,  $x \in C$  に対して  $W(x) \subset F(\mathcal{S})$  ならば net  $\{T_\alpha x : \alpha \in S\}$  は  $F(\mathcal{S})$  の元に弱収束する.

証明.  $F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$  なので,  $\{T_\alpha x : \alpha \in S\}$  は有界である. だから  $\{T_\alpha x : \alpha \in S\}$  は弱収束する subnet  $\{T_{\alpha_\lambda} x\}$  をもつ.

$T_{\alpha_\lambda} x \rightarrow z \in C$  とする. (ここで  $\rightarrow$  は弱収束を意味する.)

$z$  は  $\bigcap_{s \in S} \overline{\{T_t x : t \geq s\}}$  に属するし,  $W(x) \subset F(\mathcal{S})$  であるから

$$z \in \bigcap_{s \in S} \overline{\{T_t x : t \geq s\}} \cap F(\mathcal{S})$$

となる. ここで定理3を用いれば  $\{T_\alpha x : \alpha \in S\}$  は  $F(\mathcal{S})$  の元に弱収束することがわかる.

$E$  が Hilbert 空間のときは, つぎの定理を得る.

定理5.  $C$  を Hilbert 空間の閉凸集合とし,  $S$  を right reversible semigroup とする.  $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$  を  $C$  から  $C$  への nonexpansive 写像として  $S$  の表現とし,  $F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$  とする. このとき,  $x \in C$  に対して,  $T_\alpha x \rightarrow y \in C$  である必要十分条件は,  $S$  のすべての元  $g$  に対して

$$T_{g\alpha} x - T_\alpha x \rightarrow 0$$

となることである.

証明. "If" partのみを証明すれば十分である.  $\{T_{a_\alpha}x\}$  を  $\{T_ax: a \in S\}$  の弱収束する部分列とし,  $T_{a_\alpha}x \rightarrow z$  とする.

このとき,  $u \in F(S)$  に対し

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|T_{a_\alpha}x - z\|^2 - \|T_{ga_\alpha}x - T_gz\|^2 \\ &= \|T_{a_\alpha}x - u\|^2 + 2\langle T_{a_\alpha}x - u, u - z \rangle + \|u - z\|^2 \\ &\quad - \|T_{ga_\alpha}x - u\|^2 - 2\langle T_{ga_\alpha}x - u, u - T_gz \rangle - \|u - T_gz\|^2 \\ &= \|T_{a_\alpha}x - u\|^2 - \|T_{ga_\alpha}x - u\|^2 + 2\langle T_{a_\alpha}x - u, T_gz - z \rangle \\ &\quad + 2\langle T_{a_\alpha}x - T_{ga_\alpha}x, u - T_gz \rangle + \|u - z\|^2 - \|u - T_gz\|^2 \end{aligned}$$

であるので,

$$0 \leq 2\langle z - u, T_gz - z \rangle + \|u - z\|^2 - \|u - T_gz\|^2 = -\|z - T_gz\|^2$$

を得る. ( $\|T_ax - u\|^2$  は decreasing net であるから

$$\lim_{\alpha} \|T_{a_\alpha}x - u\|^2 = \lim_{\alpha} \|T_{ga_\alpha}x - u\|^2 = \lim_{\alpha} \|T_ax - u\|^2$$

であることに注意.) よって定理4から,  $\{T_ax: a \in S\}$  は  $F(S)$  の元に弱収束することがわかる.

この節の最後につぎの定理を得る.

定理6.  $E$  を Fréchet differentiable norm をもつ一様凸な Banach 空間とし,  $C$  をその閉凸集合,  $S$  を right reversible semigroup とする.  $\mathcal{S} = \{T_t: t \in S\}$  を  $C$  から  $C$  への nonexpansive 写像としての  $S$  の表現とし,  $F(S) \neq \emptyset$  とする. このとき,  $x \in C$  に対し

$$\lim_{\alpha} \|T_{ga_\alpha}x - T_ax\| = 0, \forall g \in S$$

ならば,  $\{T_\alpha x : \alpha \in S\}$  は  $F(S)$  の元に弱収束する.

証明. 定理4より,  $w(x) \subset F(S)$  を示せば十分である.

$\{T_\alpha x\}$  を  $\{T_\alpha x : \alpha \in S\}$  の subnet で, この元  $y$  に弱収束するものとする.  $g \in S$  に対して仮定より

$$(I - T_g)T_\alpha x \rightarrow 0$$

であるから  $(I - T_g)y = 0$  を得る. これは  $y \in F(S)$  を意味する. よって定理4から  $\{T_\alpha x : \alpha \in S\}$  は  $F(S)$  の元に弱収束する.

#### §4. Banach空間における mean ergodic theorems.

この節では特に断わらなければ,  $S$  は commutative semi-group を表わし,  $E$  は一様凸な Banach 空間を表わすものとする. また  $D$  は  $m(S)$  の subspace で, すべての constant 関数を含むものとする.  $\mu \in D^*$  が mean であるとは  $\|\mu\| = \mu(1) = 1$  を満たすときをいい,  $\mu$  が finite mean であるとは

$$\mu = \sum_{i=1}^m \alpha_i \delta_{s_i} \quad (\alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, s_i \in S)$$

なるときをいう. ここで  $\delta_s(f) = f(s)$  である.  $D$  を上のような subspace とし,  $f$  を  $S$  から  $E$  への写像で  $\{f(t) : t \in S\}$  の weak closure が weakly compact であるものとする. また任意の  $x^* \in E^*$  に対して, 実数値関数  $t \mapsto \langle f(t), x^* \rangle$  は  $D$  に含まれているものとする. このとき  $\mu \in D^*$  に対して

$$\langle f_\mu, x^* \rangle = \mu_t \langle f(t), x^* \rangle, \quad \forall x^* \in E^*$$

となるような  $f_\mu \in E$  が存在する. この  $f_\mu$  を

$$f_\mu = \int f(t) d\mu(t) \text{ または } f_\mu = \mu_t(f(t))$$

で表わす. 以下の結果は最近 Hirano-Kido-Takahashi [14] によって得られた.

定理 7.  $S$  を commutative semigroup とし,  $D$  を  $m(S)$  の subspace で,  $D \ni 1$ ,  $r_s(D) \subset D$ ,  $s \in S$  を満たすものとする.  $f$  を  $S$  から  $E$  への写像で,  $\{f(t) : t \in S\}$  の weak closure が weakly compact であり, 任意の  $x^* \in E^*$  に対して実数値関数  $t \mapsto \langle f(t), x^* \rangle$  が  $D$  に含まれるものとする. このとき,  $E$  の weakly compact な凸集合  $K$  に対して, つぎの条件は同値である.

(a)  $K$  の任意の weak 近傍  $W$  に対して

$$\lambda_t(f(t+s)) \in W, \forall s \in S$$

となる finite mean  $\lambda_t$  が存在する.

(b) finite means の net  $\{\lambda_\alpha\}$  が存在して,  $K$  の任意の weak 近傍  $W$  に対して

$$\int f(t+s) d\lambda_\alpha(t), \forall \alpha \geq \alpha_0, \forall s \in S$$

となる  $\alpha_0$  が存在する.

(c)  $m(S)$  上の invariant mean  $\mu$  に対して  $f_\mu \in K$  である.

(d)  $D$  上の invariant mean  $\mu$  に対して  $f_\mu \in K$  である.

定義.  $D$  を  $D \ni 1$ ,  $r_s(D) \subset D$  となる  $m(S)$  の subspace と

する。このとき,  $\{\mu_\alpha\} \subset D^*$  が strongly regular であるとは

$$(i) \sup_\alpha \|\mu_\alpha\| < \infty; \quad (ii) \lim_\alpha \mu_\alpha(1) = 1;$$

$$(iii) \lim_\alpha \|\mu_\alpha - r_s^* \mu_\alpha\| = 0, \quad \forall s \in S$$

を満たすときをいう。

定理 8.  $S, D, E, f$  を定理 7 のようであるとし,  $y \in E$  とする。このときつぎの条件は同値である。

(a)  $y$  の weak 近傍  $W$  に対し

$$\lambda_t(f(t+s)) \in W, \quad \forall s \in S$$

となる finite mean  $\lambda$  が存在する。

(c)  $\{\mu_\alpha\}$  を strongly regular とするとき,  $\int f(t+s) d\mu_\alpha(t)$  は  $s$  に関し  $2$  一様に  $y$  に弱収束する。

定理 7, 8 を用いて, つぎの mean ergodic theorems を証明することができる。

定理 9.  $S$  を commutative semigroup とし,  $D$  を  $m(S)$  の subspace で,  $D \ni 1$ ,  $r_s(D) \subset D$ ,  $s \in S$  となるものとする。 $C$  を  $E$  の閉凸集合とし,  $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$  を  $C$  から  $C$  への nonexpansive 写像とし  $\mathcal{S}$  の表現とする。また  $x \in C$ ,  $x^* \in E^*$  に対し, 関数  $t \mapsto \langle T_t x, x^* \rangle$  は  $D$  に含まれるものとし,  $F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$  とする。このとき,  $D$  上の invariant mean  $\mu$  に対し

$$\langle \mathcal{T}_\mu x, x^* \rangle = \int \langle T_t x, x^* \rangle d\mu_t, \quad \forall x^* \in E^*$$



で定義される  $\mathcal{T}_\mu$  は  $C$  から  $F(\mathcal{S})$  上への nonexpansive retraction で, 任意の  $s \in S$  に対し  $\mathcal{T}_\mu T_s = T_s \mathcal{T}_\mu = \mathcal{T}_\mu$  であり, しかも  $\mathcal{T}_\mu x \in \overline{\text{co}}\{T_t x : t \in S\}$ ,  $\forall x \in C$  を満たす.

定理10.  $S, D, C, E, \mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$  は定理9 のようであるとし, さらに  $E$  は Fréchet differentiable norm をもつものとする. このとき,  $C$  から  $F(\mathcal{S})$  上への nonexpansive retraction  $P$  で, 任意の  $s \in S$  に対し  $P T_s = T_s P = P$  であり, しかも  $P x \in \overline{\text{co}}\{T_t x : t \in S\}$ ,  $\forall x \in C$  となるものが一意に存在する.

さらに  $\{\mu_\alpha\} \subset D^*$  が strongly regular であるならば,  $x \in C$  に対し  $\mathcal{T}_{\mu_\alpha} T_t x$  は  $t$  に関して一様に  $P x$  に弱収束する.

証明. 定理9 によつて,  $C$  から  $F(\mathcal{S})$  上への "Ergodic retraction  $P$ " が存在する. また任意の  $s \in S$  に対し

$$P x = P T_s x \in \overline{\text{co}}\{T_t T_s x : t \in S\} \subset \overline{\text{co}}\{T_t x : t \in S\}$$

であるから,  $P x \in \bigcap_s \overline{\text{co}}\{T_t x : t \in S\} \cap F(\mathcal{S})$  となり, 定理3 を使えば, 2 のような  $P$  は一意であることがわかる.  $\mu$  を invariant mean とし,  $x \in C$  とすると

$$\mathcal{T}_\mu x = \int T_t x d\mu(t) = P x$$

であるから, 定理7, 8 より  $\int T_{s+t} x d\mu_\alpha(s) = \mathcal{T}_{\mu_\alpha} T_t x$  は  $t$  に関して一様に  $P x$  に弱収束する.

## §5. Applications

定理10を用いると, つぎのような系は簡単に証明できる.

系1.  $E$  を Fréchet differentiable norm をもつ一様凸な Banach 空間とし,  $C$  を  $E$  の閉凸集合とする.  $T$  を  $C$  から  $C$  への nonexpansive 写像で,  $F(T) \neq \emptyset$  とする. このとき, 任意の  $x \in C$  に対して

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} T^{i+k} x \rightarrow y \in F(T)$$

である. またこの収束は  $k$  に関して一様でもある.

証明.  $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $\mathcal{S} = \{T^i : i = 0, 1, 2, \dots\}$ ,  $D = m(S)$  とし, 任意の  $f \in D$  に対して

$$\mu_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(i)$$

とする. このとき  $\{\mu_n\}$  は strongly regular である.

系2.  $E$  を Fréchet differentiable norm をもつ一様凸な Banach 空間とし,  $C$  を  $E$  の閉凸集合とする.  $\mathcal{S} = \{S(t) : 0 \leq t\}$  を  $C$  上の nonexpansive semigroup とし,  $F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$  とする. このとき, 任意の  $x \in C$  に対して

$$\frac{1}{s} \int_0^s S(t+k)x dt \rightarrow y \in F(\mathcal{S})$$

である. またこの収束は  $k$  に関して一様でもある.

証明.  $S = [0, \infty)$ ,  $\mathcal{S} = \{S(t) : 0 \leq t\}$ ,  $D = C(S)$  (ただし,  $C(S)$  は  $\mathcal{S}$  上の有界連続関数の全体である) とし, 任意の  $f \in D$  に対して

$$\mu_s(f) = \frac{1}{s} \int_0^s f(t) dt$$

とすると,  $\{\mu_s\}$  は strongly regular である.

$N = \{0, 1, 2, \dots\}$  とし,  $Q = \{q_{n,m}\}_{n,m \in N}$  を strongly regular matrix とする. すなわち

$$(i) \sup_n \sum_m |q_{n,m}| < \infty; (ii) \lim_n \sum_m q_{n,m} = 1;$$

$$(iii) \lim_n \sum_m |q_{n,m+1} - q_{n,m}| = 0$$

を満たすとする. このとき, つぎの系を証明できる.

系3.  $E$  を Fréchet differentiable norm をもつ 一様凸な Banach 空間とし,  $C$  を  $E$  の閉凸集合とする.  $T$  を  $C$  から  $C$  への nonexpansive 写像で,  $F(T) \neq \emptyset$  とする. このとき 任意の  $x \in C$  に対して

$$\sum_m q_{n,m} T^{m+k} x \rightarrow y \in F(T)$$

である. またこの収束は  $k$  に関しても一様収束でもある.

証明は系1, 2と同様である. またつぎのような系も得られる.

系4.  $E$  を Fréchet differentiable norm をもつ 一様凸な Banach 空間とし,  $C$  を  $E$  の閉凸集合とする.  $S, T$  を  $C$  から  $C$  への nonexpansive 写像で,  $ST = TS$  なるものとし,  $F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$  とする. このとき, 任意の  $x \in C$  に対して

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i,j=0}^{n-1} S^{i+k} T^{j+h} x \rightarrow y \in F(S) \cap F(T)$$

である. またこの収束は  $k, h$  に関しても一様でもある.

以上のようなエルゴード定理は発展方程式の理論と大きな  
かかわりをもっている。Baillon-Brezis [3] は発展方程式の  
理論を用いて,  $C$  上の nonexpansive semigroup のエルゴ  
ード定理(系2) を証明したし, Bruck [7] はつぎのような  
命題を証明した。

$\varphi$  を Hilbert 空間  $H$  から  $(-\infty, \infty]$  への proper lower semi-  
continuous convex 関数とし, 最小値をもつものとする。  
 $\partial\varphi$  を  $\varphi$  の subdifferential とし,  $\mathcal{S} = \{S(t); 0 \leq t\}$  を  $-\partial\varphi$  に  
よって生成される  $\overline{D(\partial\varphi)}$  上の nonexpansive semigroup  
とすると, 任意の  $x \in \overline{D(\partial\varphi)} = \overline{D(\varphi)}$  に対して,  $S(t)x$  は  
 $\partial\varphi^{-1}(0)$  の元に弱収束する。

またエルゴード定理の応用として, Baillon-Clément [4],  
Hirano [12] は Hilbert 空間における Nonlinear Volterra  
Equations の解の asymptotic behavior を研究し, Kido [17]  
は一樣凸な Banach 空間においてそれを行った。

最後に定理10を用いてつぎのような変分不等式に関する解  
の近似法も考えられるので挙げておきたい。

$C$  を Hilbert 空間  $H$  の閉凸集合とし,  $A$  を maximal  
monotone 作用素とする。  $I_C$  を  $x \in C$  のとき  $I_C(x) = 0$ ,  
 $x \notin C$  のとき  $I_C(x) = \infty$  であるような関数とし,  $\partial I_C$  をその  
subdifferential とする。  $A + \partial I_C$  を maximal monotone

であるとし、変分不等式:

$$\begin{cases} u \in C \cap D(A), v \in Au, \\ \langle v, x - u \rangle \geq 0, \forall x \in C \end{cases}$$

を考える. この不等式は解  $u_0 \in C$  をもつものとし,  
 $T = (I + A + \partial I_C)^{-1}$  とすると,  $T$  は  $C$  から  $C$  への nonexpansive 写像であり,  $T$  の不動点  $F(T)$  は変分不等式の解の集合と一致する. ゆえに  $u_0 \in F(T)$ .  $x \in C$  に対し,  $r = \|x - u_0\|$  とし,  $C' = C \cap B_r[u_0]$  とする. ただし  $B_r[u_0] = \{z \in H : \|u_0 - z\| \leq r\}$  である. すると  $C'$  は  $T$ -invariant であり,  $C'$  は  $H$  の空でない weakly compact convex 集合である. このとき,  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \infty$ ,  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty$  とする positive sequence  $\{a_i\}$  に対し,

$$g_{\mu_n} x = \sum_{i=1}^n a_i T^i x / \sum_{i=1}^n a_i$$

を考えると, 定理10よりこれは変分不等式の解へ弱収束する.

## References

- [1] J. B. Baillon, Un théorème de type ergodique pour les contractions nonlinéaires dans un espace de Hilbert, C. R. Acad. Sci. Paris, 280 (1975), 1511-1514.
- [2] J. B. Baillon, Quelques propriétés de convergence asymptotique pour les semigroupes de contractions impaires, C. R. Acad. Sci. Paris, 283 (1976), 75-78

- [3] J. B. Baillon - H. Brezis, Une remarque sur le comportement asymptotique des semigroupes non linéaires, Houston J. Math., 2 (1976), 5-7.
- [4] J. B. Baillon - P. Clément, Ergodic theorems for nonlinear Volterra equations in Hilbert space, Nonlinear Analysis, 5 (1981), 789-801
- [5] H. Brézis - F. E. Browder, Remarks on nonlinear ergodic theory, Advance Math., 25 (1977), 165-177.
- [6] R. Bruck, A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces, Israel J. Math., 32 (1979), 107-116.
- [7] R. Bruck, Asymptotic convergence of nonlinear contraction semigroups in Hilbert space, J. Func. Anal., 18 (1975), 15-26.
- [8] M. M. Day, Amenable semigroups, Illinois J. Math., 1 (1957), 509-544.
- [10] E. Granirer, On amenable semigroups with a finite-dimensional set of invariant means I, Illinois J. Math., 7 (1963), 32-48.
- [11] E. Granirer, A theorem on amenable semigroups, Trans. Amer. Math. Soc., 111 (1964), 367-379.

- [11] N. Hirano, A proof of the mean ergodic theorem for nonexpansive mappings in Banach space, Proc. Amer. Math. Soc., 78 (1980), 361-365.
- [12] N. Hirano, Asymptotic behavior of solutions of nonlinear Volterra equations, J. Differential Equations, 47 (1983), 163-179.
- [13] N. Hirano-K. Kido-W. Takahashi, Asymptotic behavior of commutative semigroups of nonexpansive mappings in Banach spaces, to appear.
- [14] N. Hirano-K. Kido-W. Takahashi, to appear.
- [15] N. Hirano-W. Takahashi, Nonlinear ergodic theorems for nonexpansive mappings in Hilbert spaces, Kōdai Math. J. 2 (1979), 11-25.
- [16] N. Hirano-W. Takahashi, Nonlinear ergodic theorems for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Banach space, Pacific J. Math., 112 (1984), 333-346.
- [17] K. Kido, Almost convergence of solution of nonlinear Volterra equation in Banach space, to appear.
- [18] K. Kido-W. Takahashi, Mean ergodic theorems for semigroups of linear continuous operators in Banach spaces, to appear in J. Math. Anal. Appl.

- [19] K. Kido-W. Takahashi, Means on commutative semigroups and nonlinear ergodic theorems, to appear in J. Math. Anal. Appl..
- [20] 高村幸男-小西芳雄, 非線形発展方程式, 岩波講座基礎数学, 岩波書店, 1977.
- [21] A. T. Lau, Semigroup of nonexpansive mappings on a Hilbert space, to appear in J. Math. Anal. Appl..
- [22] A. T. Lau-W. Takahashi, Weak convergence and nonlinear ergodic theorems for reversible semigroup of nonexpansive mappings, to appear.
- [23] 宮寺功, 非線形半群, 紀伊国屋書店, 1977.
- [24] I. Miyadera-K. Kobayashi, On the asymptotic behavior of almost-orbits of nonlinear contractive semigroups in Banach spaces, Nonlinear Analysis, 6 (1982), 349-365.
- [25] R. R. Phelps, Convex sets and nearest points, Proc. Amer. Math. Soc., 8 (1957), 790-797.
- [26] S. Reich, Nonlinear evolution equations and nonlinear ergodic theorems, Nonlinear Analysis, 1 (1977), 319-330.
- [27] S. Reich, Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl.,



67 (1979), 274-276.

- [28] W. Takahashi, Invariant functions for amenable semigroups of positive contractions on  $L^1$ , Kodai Math. Sem. Rep., 23 (1971), 131-143.
- [29] W. Takahashi, Nonlinear variational inequalities and fixed point theorems, J. Math. Soc. Japan, 28 (1976), 168-181.
- [30] 高橋渉, 不動点定理とその周辺, 三田学会雑誌, 73 (1980), 32-68.
- [31] W. Takahashi, A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc., 81 (1981), 253-256.
- [32] W. Takahashi, Fixed point theorems for families of nonexpansive mappings on unbounded sets, J. Math. Soc. Japan, 36 (1984), 543-553.
- [33] W. Takahashi, A nonlinear ergodic theorem for a reversible semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space, to appear.
- [34] 高橋渉-平野戴倫, 非線形函数解析学における最近の話題-非線形エルゴード定理について-, 数学 33 (1981), 50-65.